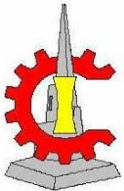


# ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

## ARMADURAS ISOSTÁTICAS

PROFESOR: ROLANDO CISNEROS AYALA  
INGENIERO CIVIL POR LA UNSCH  
INGENIERO ESTRUCTURAL POR UGR

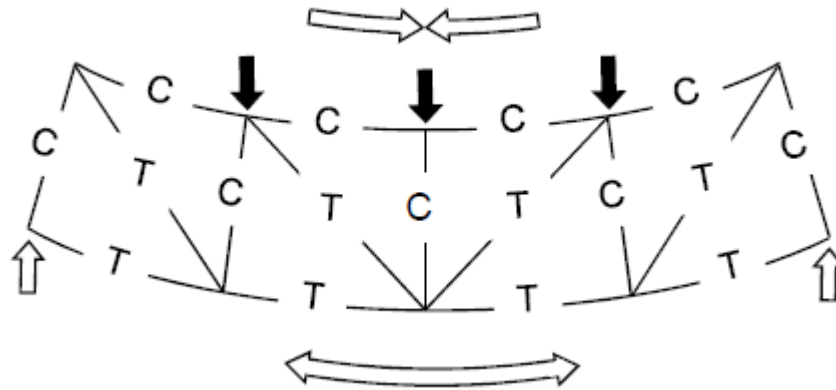
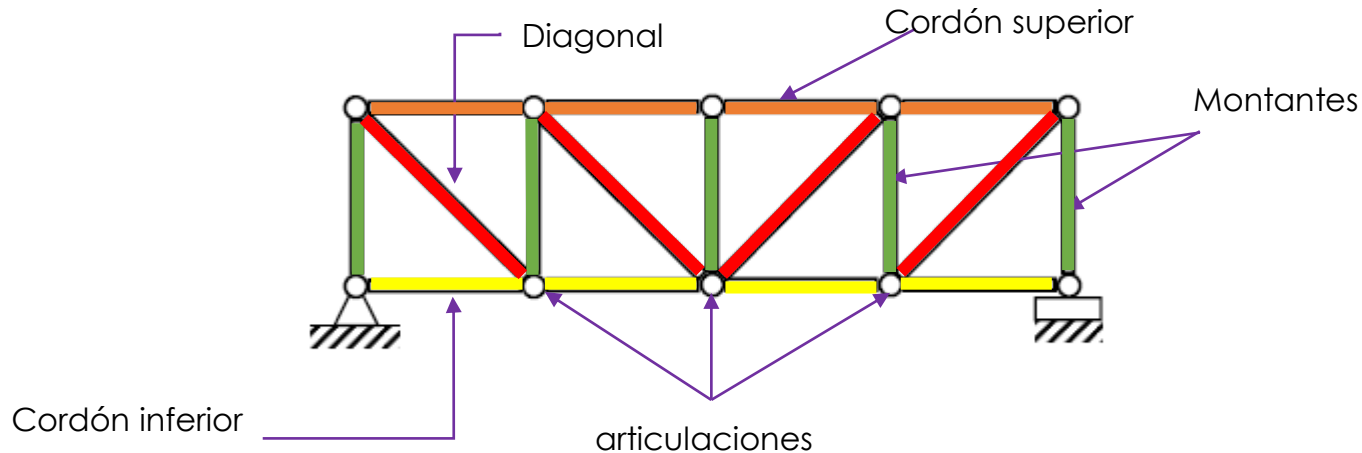


FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL  
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



# I) ARMADURAS O CERCHAS

Una celosía es una estructura formada por barras rectas unidas entre sí por medio de articulaciones, tal que al estar sometida a fuerzas exteriores sus barras trabajan exclusivamente a esfuerzo axial.



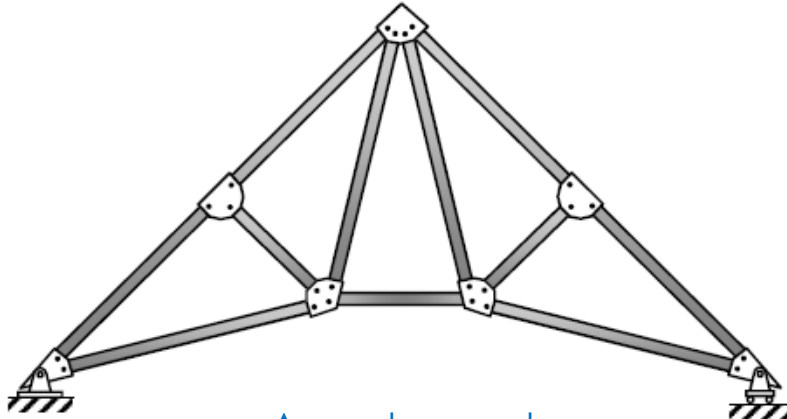
## 1.1) HIPOTESIS PARA EL ESTUDIO DE ARMADURAS O CELOSÍAS

El modelo estructural idealizado que se emplea para el estudio de una celosía se basa en las siguientes suposiciones:

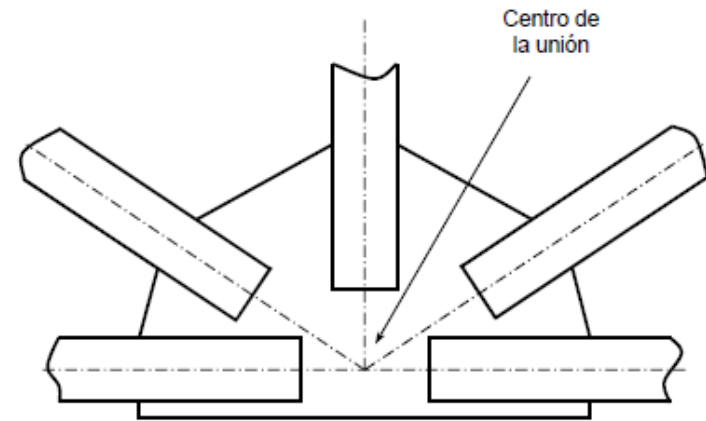
- ✧ Las barras se unen entre sí en un extremo mediante uniones que sólo transmiten fuerzas y no pueden transmitir ningún tipo de momento: articulaciones en el caso plano y rótulas esféricas en el caso espacial, tanto unas como otras sin fricción.
- ✧ El eje centroidal de cada barra es recto, y coincide con la línea que une los centros de las articulaciones de cada extremo de la barra.
- ✧ La sección transversal de cada barra tiene un área despreciable frente a su longitud.
- ✧ Las fuerzas están aplicadas en los nudos, y nunca sobre las barras. Esto obliga a sustituir el peso propio de las barras por fuerzas aplicadas en los nudos extremos de las mismas.

## 1.2) IDEALIZACIÓN DE LAS ARTICULACIONES DE LA ARMADURA

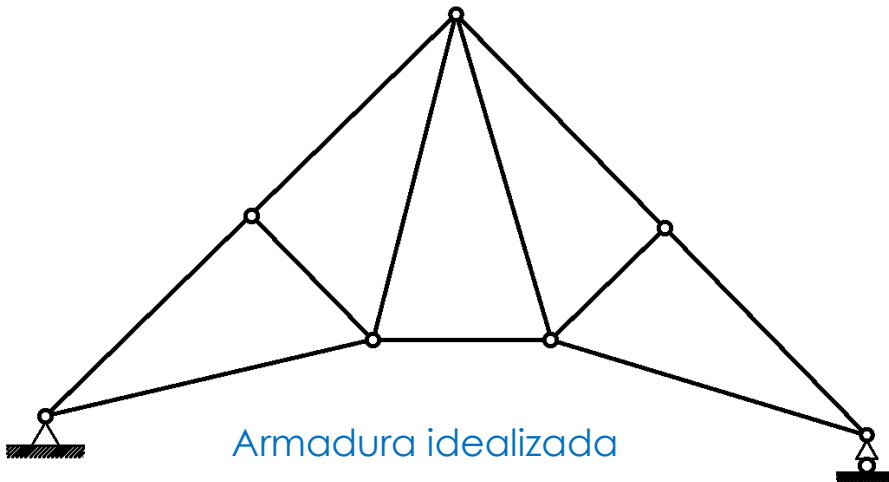
En las figuras se muestra la forma en que se materializan en la práctica las uniones entre las barras. En la mayoría de los casos estas uniones se forman uniendo mediante tornillos o soldadura los extremos de las barras a una placa común.



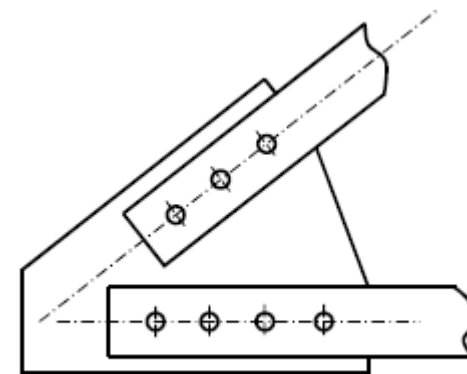
Armadura real



Unión Soldada



Armadura idealizada

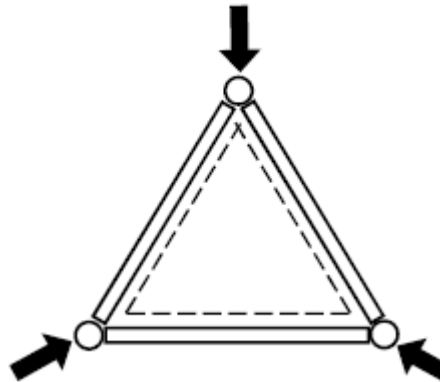


Unión mediante pernos

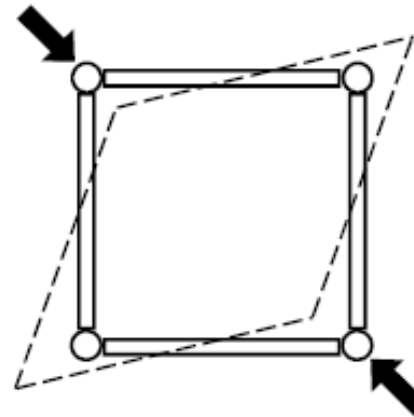
### 1.3) ESTABILIDAD INTERNA DE LAS ARMADURAS PLANAS

Podemos definir una armadura plana como internamente estable si el número y arreglo geométrico de sus elementos de la armadura no cambia de forma y se mantiene como un cuerpo rígido al aplicar las cargas.

La armadura triangular es internamente estable en el sentido de que es un cuerpo rígido que no cambia su forma bajo la acción de las cargas. En cambio, una armadura rectangular es internamente inestable ya que cambiara su forma y colapsará cuando se sujete a un sistema general de fuerzas coplanares.



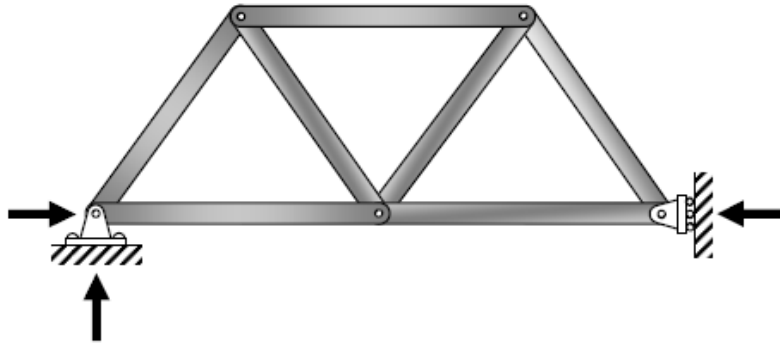
Configuración estable



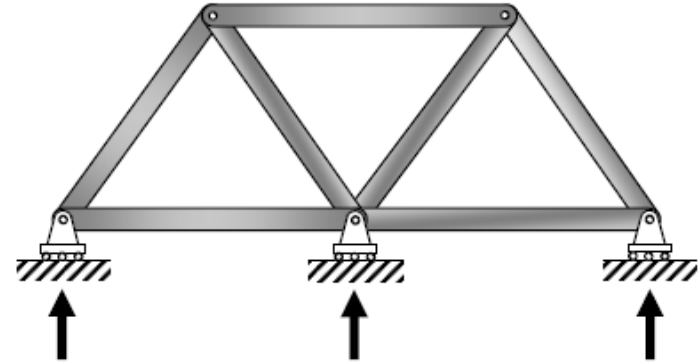
Configuración Inestable

## 1.4) ESTABILIDAD EXTERNA DE LAS ARMADURAS PLANAS

La inestabilidad debida a los apoyos externos insuficientes o al arreglo inapropiado de los apoyos externos se conoce como INESTABILIDAD EXTERNA.



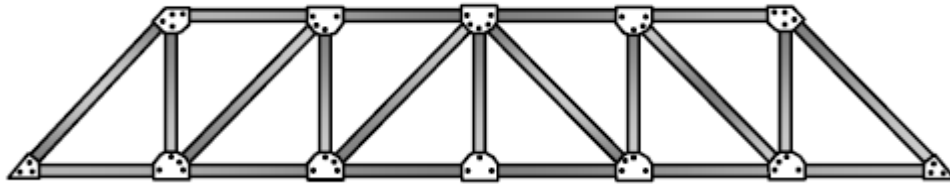
Configuración inestable



Configuración Inestable

## 1.5) TIPOS COMUNES DE ARMADURAS

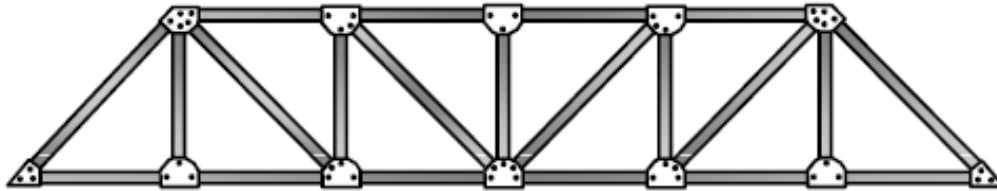
### 1.5.1) ARMADURA PARA PUENTES



Celosía Howe



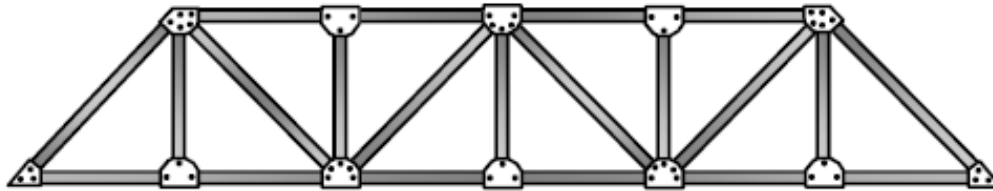
Diagonales en Compresión



Celosía Pratt



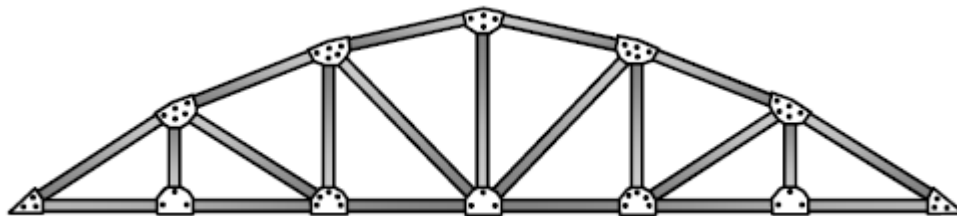
Diagonales en Tracción



Celosía Warren



Triangulada

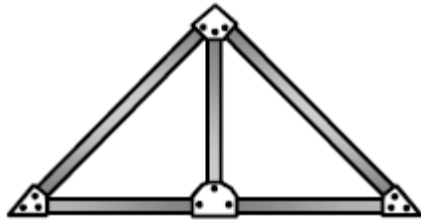


Celosía Parker

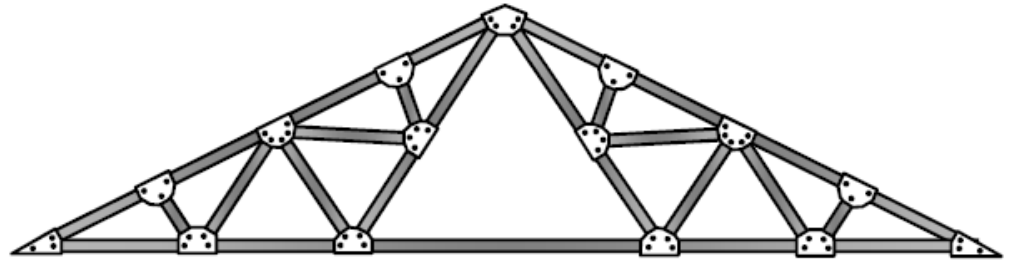


Sección transversal variable

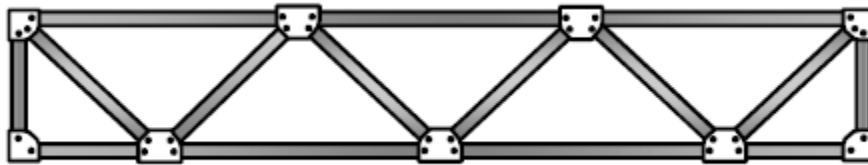
## 1.5.2) ARMADURA PARA CUBIERTA O TECHO



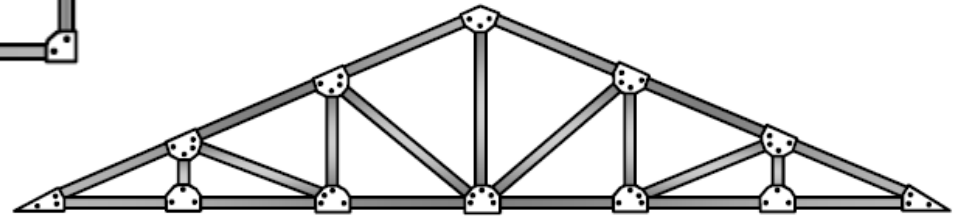
Celosía King Post



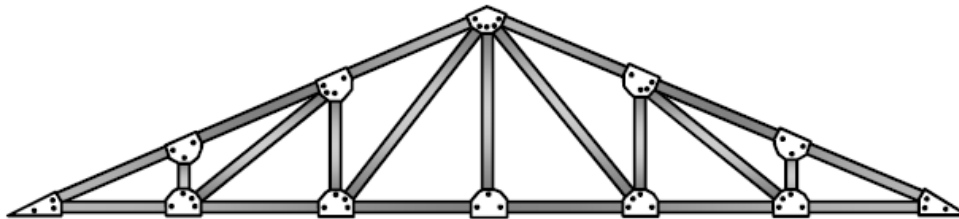
Celosía Fink



Celosía Warren



Celosía Pratt



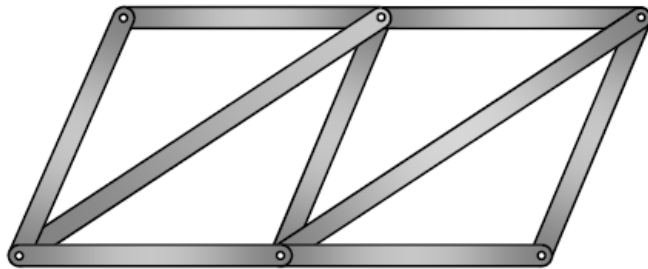
Celosía Howe



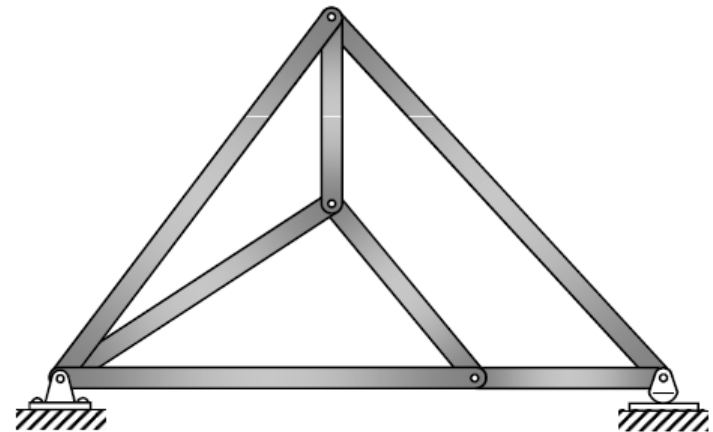
## 1.6) CLASIFICACIÓN DE ARMADURAS

### 1.6.1) ARMADURAS SIMPLES

A partir de un triángulo básico se van añadiendo nudos. Los nudos no tienen por qué ser contiguos.



Celosía simple

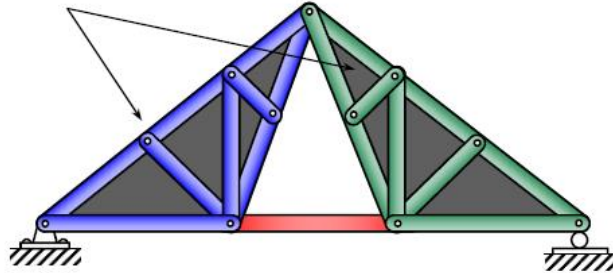


Celosía simple

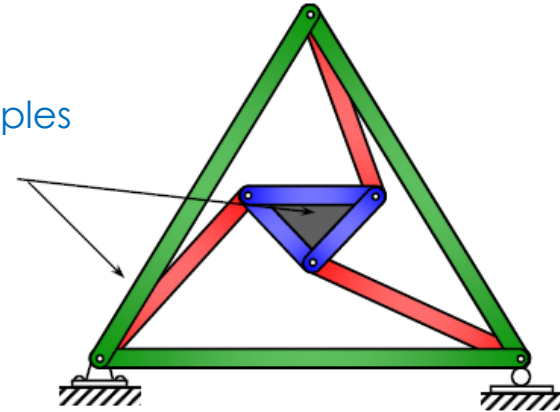
## 1.6.2) ARMADURAS COMPUESTAS

Surge a partir de la unión de armaduras simples

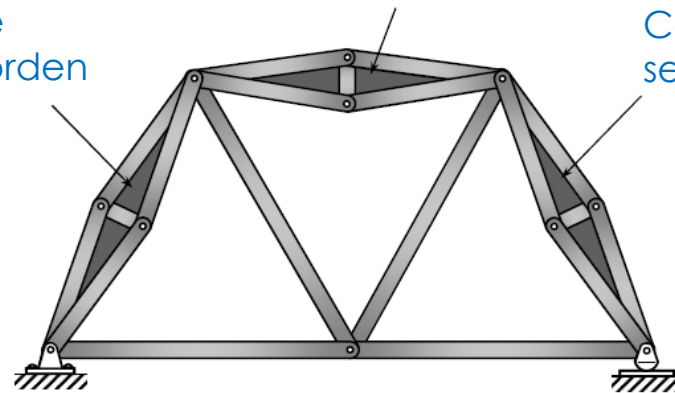
Celosías simples



Celosías simples



Celosía de segundo orden

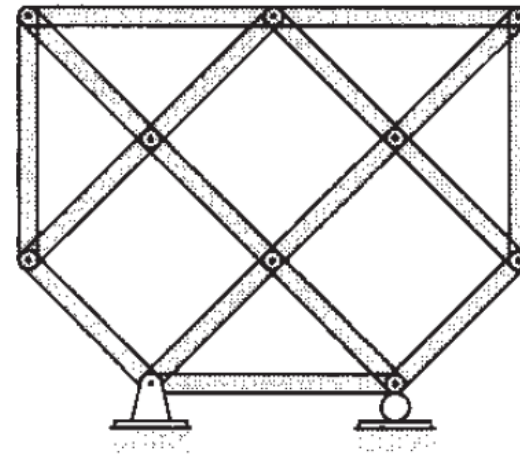
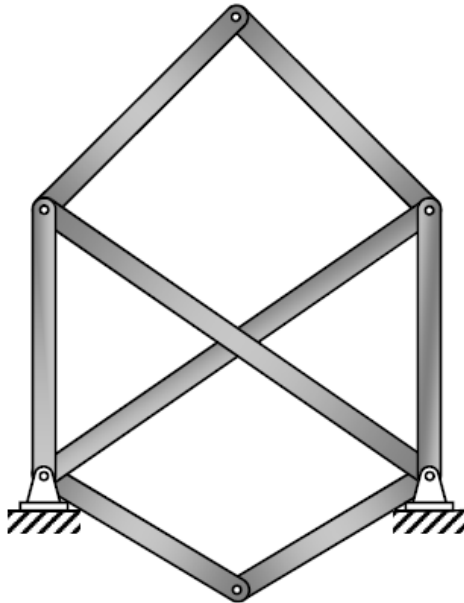


Celosía de segundo orden

Celosía de segundo orden

### 1.6.3) ARMADURAS COMPLEJAS

Son aquellas armaduras que no son simples ni compuestas. Desde el punto de vista analítico, la diferencia entre las armaduras compuestas y las complejas estriba en el hecho de que ni el método de los nodos ni el de las secciones se puede emplear en el análisis de armaduras complejas de manera directa.



## 1.7) MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ARMADURAS ISÓSTICAS

Emplearemos dos métodos tradicionales para el cálculo de esfuerzos en estructuras articuladas isostáticas:

- ⇒ Método Analítico o de los nodos
- ⇒ Método de las Secciones o de Ritter

### 1.7.1) CONVENCION DE SIGNOS:

Con la intención de establecer un criterio claro para los signos de los axiles, se procederá de la siguiente manera:

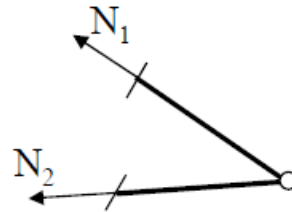
- ⇒ Se considerará positivos los axiles de tracción y negativos los de compresión.
- ⇒ A la hora de resolver el equilibrio de nodos, se plantearán siempre axiles positivos en las barras, esto es, de tracción o, lo que es lo mismo, esfuerzos siempre saliendo de los nodos y apuntando hacia afuera de los mismos.

### 1.7.2) METODO DE LOS NODOS O ANALITICO:

Consiste en plantear el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en cada nodo de la estructura y resolver el sistema de ecuaciones resultante:

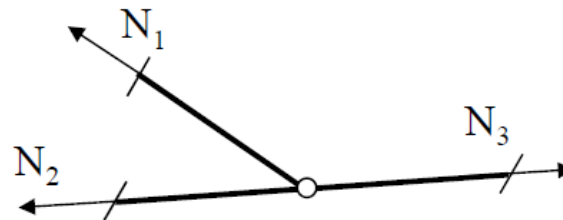
#### Elemento de fuerza cero (celosías 2D)

Si se unen en un nodo sin carga exterior dos barras no col-lineales el esfuerzo axial en dichas barras es nulo.



$$N_1 = N_2 = 0$$

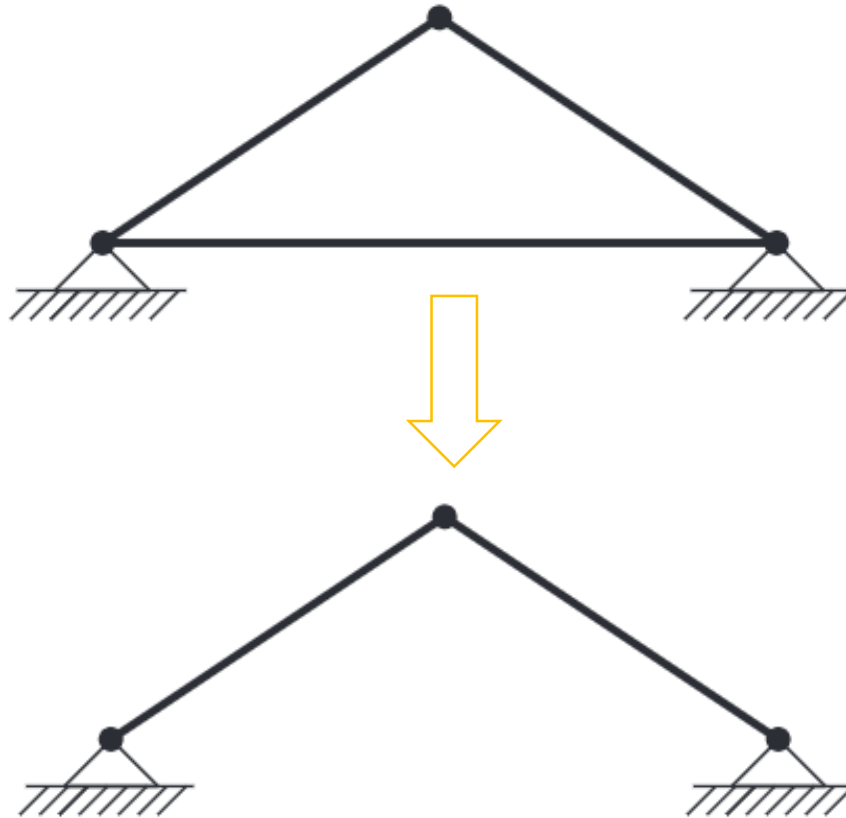
Si se unen en un nodo sin carga exterior tres barras siendo dos de ellas colineales, el esfuerzo axial de la tercera es nulo



$$N_1 = 0$$

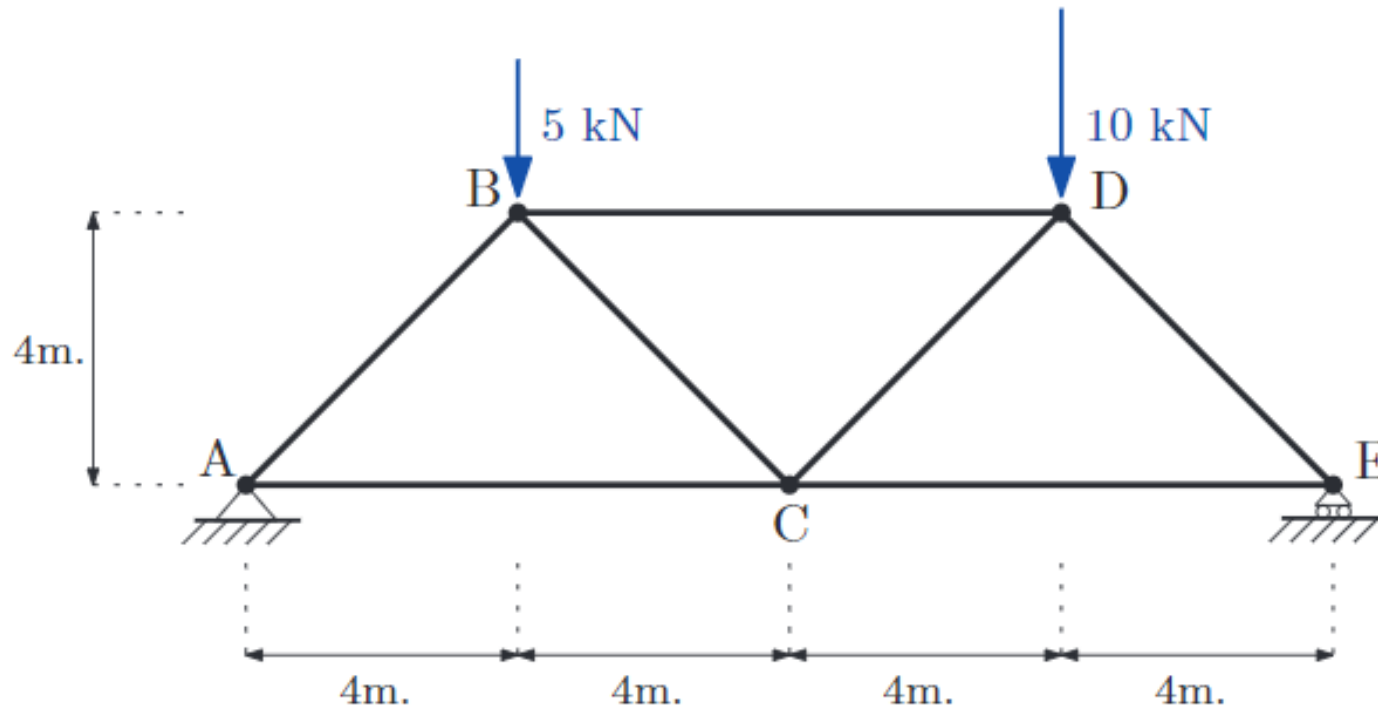
## Barras que no forman del esquema resistente de la armadura

Si en una barra que une dos apoyos fijos, no actúan variaciones térmicas, no experimenta esfuerzo axial dicha barra. Por lo tanto el calculo de la estructura puede simplificarse eliminando dicha barra, pues no constituye parte de la estructura resistente.



### EJEMPLO DE APLICACIÓN N°01:

Obtener las reacciones y axiles en las barras de la siguiente estructura



## DETERMINACIÓN DE LA ISOSTATICIDAD DE LA ESTRUCTURA:

$$\begin{cases} b = 7 \\ r = 3 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} = b + r = 10 \\ \text{n}^\circ \text{ de ecuaciones} = 2n = 10 \end{cases}$$

$$g = (b+r) - 2n = 0 \quad (\text{Estructura isostática})$$

## RESOLVEMOS EL EQUILIBRIO GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow \boxed{R_{hA} = 0 \text{ kN}}$$

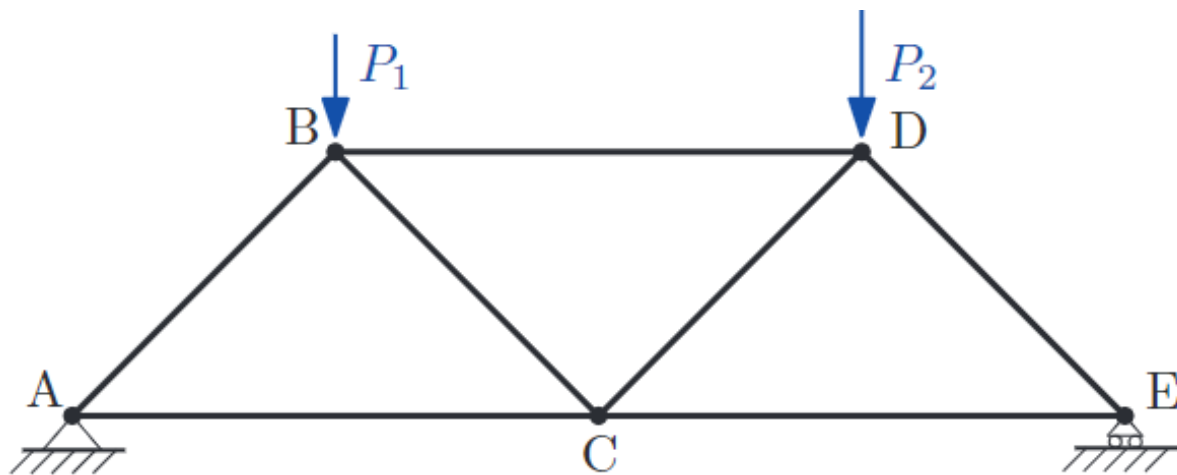
$$\sum F_v = 0 \Rightarrow R_{vA} + R_{vE} = 5 + 10$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 5 \cdot 4 + 10 \cdot 12 = R_{vE} \cdot 16 \Rightarrow \boxed{R_{vE} = 8.75 \text{ kN}}$$

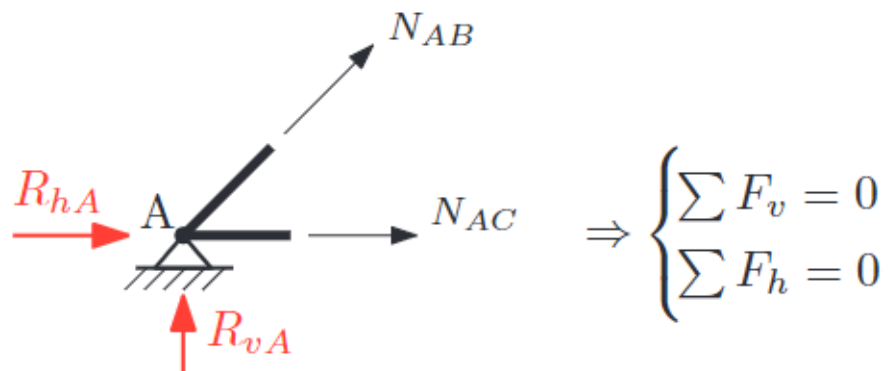
$$\text{por lo tanto} \Rightarrow \boxed{R_{vA} = 6.25 \text{ kN}}$$



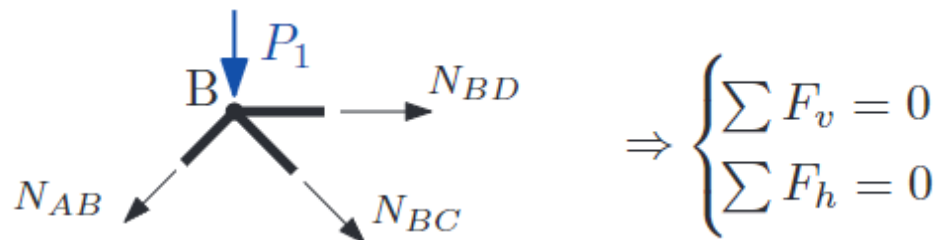
## PLANTEAMOS EQUILIBRIO DE NODOS SUCESIVOS:




**Nodo A:**



**Nodo B:**

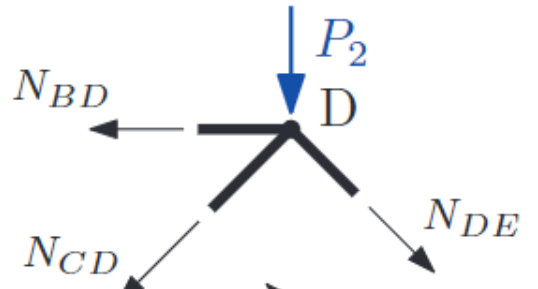


**Nodo C:**



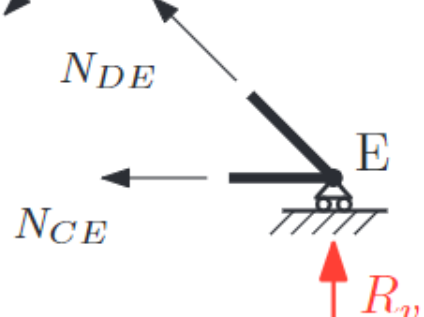
$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_v = 0 \\ \sum F_h = 0 \end{cases}$$

**Nodo D:**



$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_v = 0 \\ \sum F_h = 0 \end{cases}$$

**Nodo E:**



$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_v = 0 \\ \sum F_h = 0 \end{cases}$$

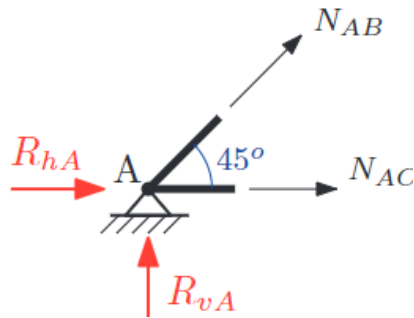


10 ecuaciones

Incógnitas:  $\begin{cases} N_{AB} & N_{AC} & N_{BC} & N_{BD} & N_{CD} \\ N_{CE} & N_{DE} & R_{vA} & R_{hA} & R_{vE} \end{cases}$

## ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN CADA NODO

⇒ Equilibrio en el nodo A:



$$\sum F_H = 0$$

$$N_{AB} \cdot \cos 45^\circ + N_{AC} = 0$$

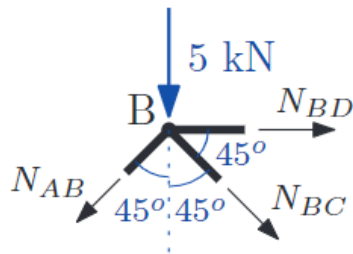
$$\sum F_V = 0$$

$$N_{AB} \cdot \sin 45^\circ + R_{vA} = 0$$

$$N_{AB} = -8.84 \text{ kN}$$

$$N_{AC} = 6.25 \text{ kN}$$

⇒ Equilibrio en el nodo B:

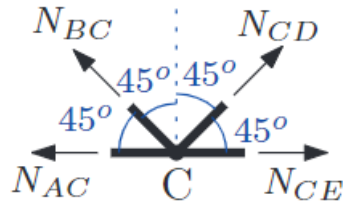


$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{BD} + N_{BC} \cdot \sin 45^\circ = N_{AB} \cdot \sin 45^\circ$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow 5 + N_{AB} \cdot \cos 45^\circ + N_{BC} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{BC} = 1.77 \text{ kN} \\ N_{BD} = -7.50 \text{ kN} \end{cases}$$

### Equilibrio en el nodo C:

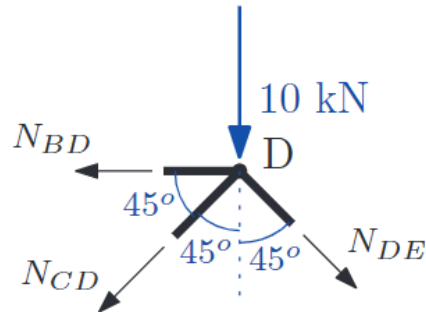


$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{CE} + N_{CD} \cdot \cos 45^\circ = N_{AC} + N_{BC} \cdot \cos 45^\circ$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{BC} \cdot \sin 45^\circ + N_{CD} \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{CE} = 8.75 \text{ kN} \\ N_{CD} = -1.77 \text{ kN} \end{cases}$$

### Equilibrio en el nodo D:



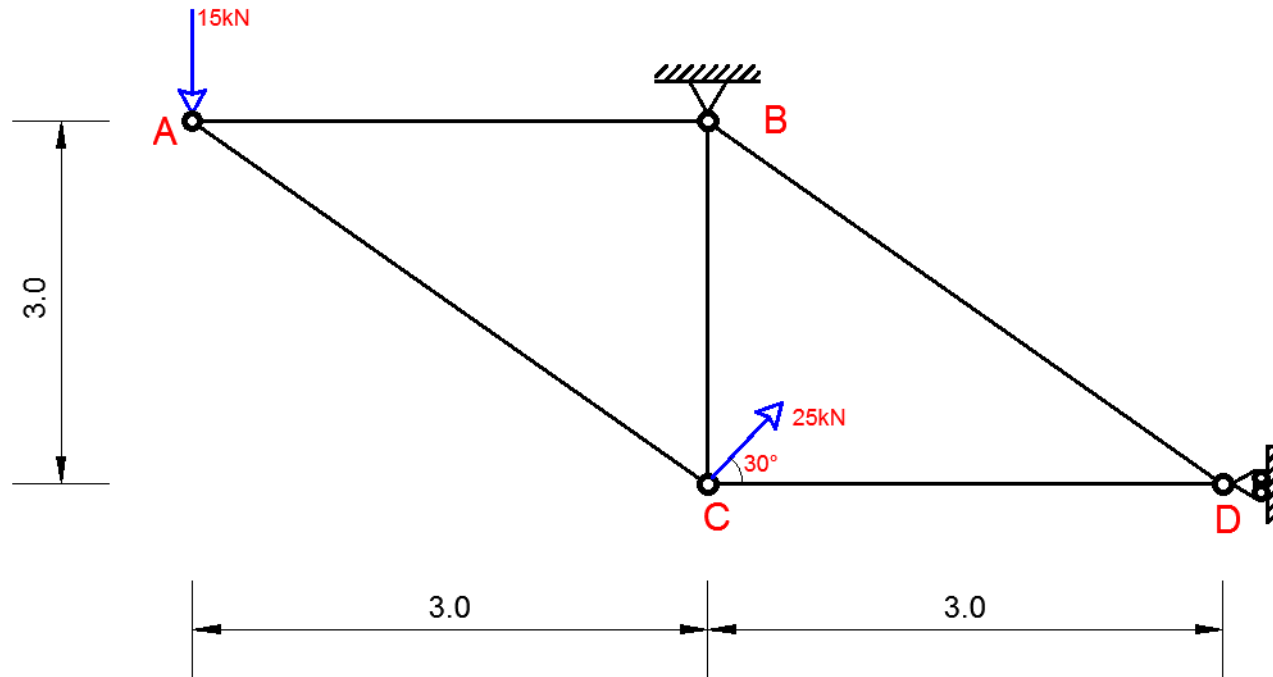
$$\sum F_V = 0$$

$$N_{CD} \cdot \cos 45^\circ + N_{DE} \cdot \cos 45^\circ + 10 = 0$$

$$N_{DE} = -12.37 \text{ kN}$$

## EJEMPLO DE APLICACIÓN N°02:

Determine el grado de hiperestatismo de la estructura, reacciones en los apoyos y fuerzas axiales en la barras.

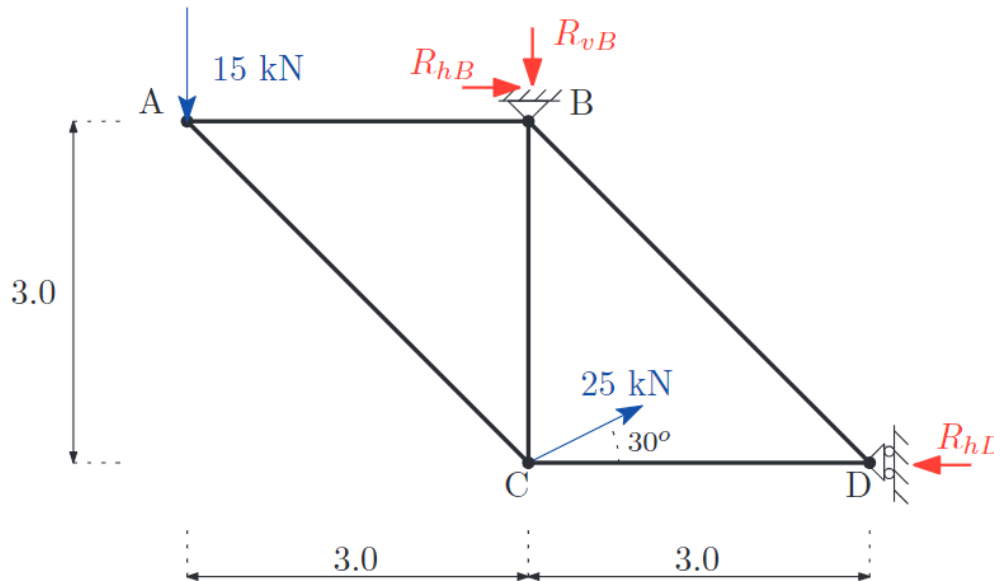


## DETERMINACIÓN DEL GRADO DE HIPERESTATISMO DE LA ARMADURA

$$\begin{cases} b = 5 \\ r = 3 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{nº de incógnitas} = b + r = 8 \\ \text{nº de ecuaciones} = 2n = 8 \end{cases}$$

$$g = (b + r) - 2n = 0 \quad (\text{Estructura isostática})$$

RESOLVEMOS EL EQUILIBRIO GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:



$$\sum F_V = 0$$

$$\sum F_H = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_{vB} + 15 = 25 \cdot \sin 30^\circ$$

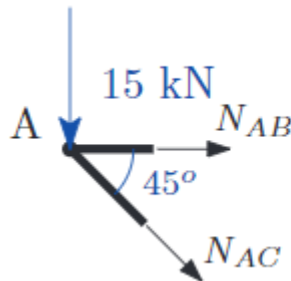
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{hB} + 25 \cdot \cos 30^\circ - R_{hD} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 15 \cdot 3 + 25 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 = R_{hD} \cdot 3$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{hB} = 15 \text{ kN}} \quad \boxed{R_{vB} = -2.5 \text{ kN}} \quad \boxed{R_{hD} = 36.65 \text{ kN}}$$

## EQUILIBRIO EN CADA NODO

↳ Equilibrio en el nodo A:

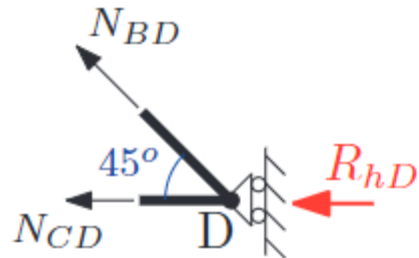


$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{AB} + N_{AC} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{AC} \cdot \sin 45^\circ + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{AB} = 15 \text{ kN}} \\ \boxed{N_{AC} = -21.21 \text{ kN}}$$

⇒ Equilibrio en el nodo D:



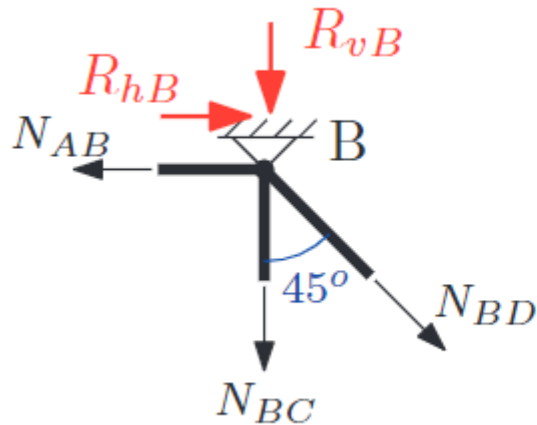
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{CD} + N_{BD} \cdot \cos 45^\circ + R_{hD} = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{BD} \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{BD} = 0 \text{ kN} \\ N_{CD} = -36.65 \text{ kN} \end{cases}$$

⇒ Equilibrio en el nodo B:



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow$$

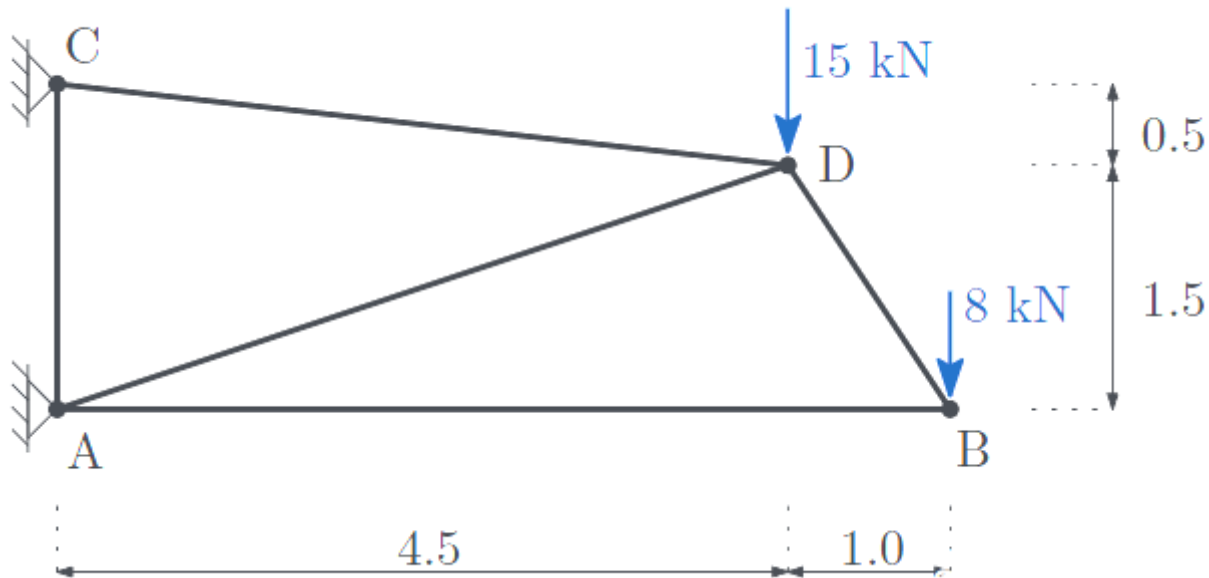
$$N_{BD} \cdot \cos 45^\circ + N_{BC} + R_{vB} = 0$$

$$\Rightarrow N_{BC} = 2.5 \text{ kN}$$



### EJEMPLO DE APLICACIÓN N°03:

Para la estructura mostrada, calcular el grado de hiperestatismo y las reacciones en los apoyos y esfuerzos (axiles) en la barras.

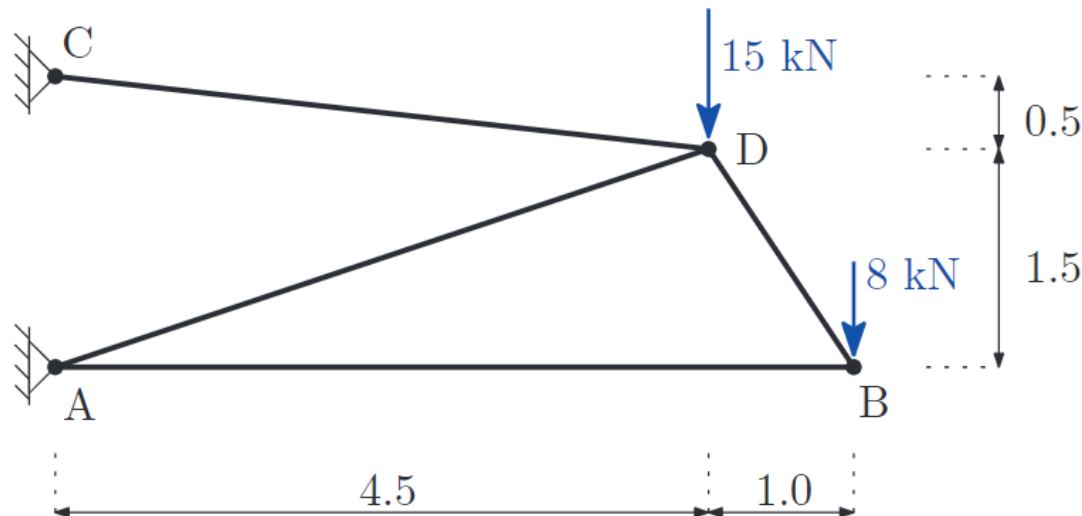


## DETERMINACIÓN DEL GRADO DE HIPERESTATISMO DE LA ARMADURA

$$\begin{cases} b = 5 \\ r = 4 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^{\circ} \text{ de incógnitas} = b + r = 9 \\ n^{\circ} \text{ de ecuaciones} = 2n = 8 \end{cases}$$

$$g = (b + r) - 2n = 1 \text{ (Estructura hiperestática)}$$

Según este análisis, la estructura es hiperestática, sin embargo, esta conclusión no es correcta. Si observamos la estructura con atención vemos que la barra AC une dos apoyos que no experimentan desplazamiento, por lo tanto no forma parte de la estructura resistente y eliminarla no afecta el comportamiento de la estructura.



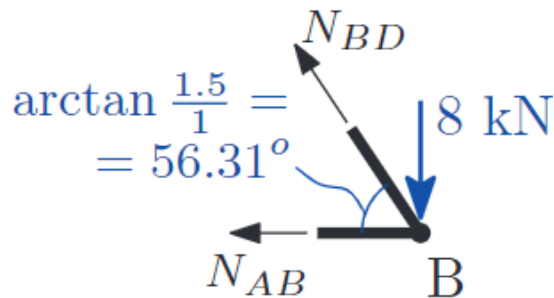
## DETERMINACIÓN DEL GRADO DE HIPERESTATISMO DE LA ARMADURA

$$\begin{cases} b = 4 \\ r = 4 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^{\circ} \text{ de incógnitas} = b + r = 8 \\ n^{\circ} \text{ de ecuaciones} = 2n = 8 \end{cases}$$

$$g = (b+r) - 2n = 0 \text{ ( Estructura isostática)}$$

### EQUILIBRIO EN LOS NODOS

⇒ Equilibrio en el nodo B:



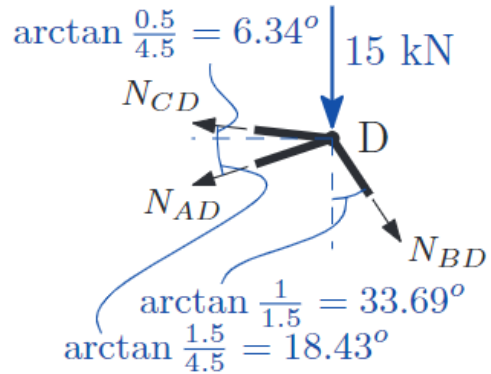
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{AB} + N_{BD} \cdot \cos 56.31^{\circ} = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{BD} \cdot \sin 56.31^{\circ} = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{AB} = -5.33 \text{ kN} \\ N_{BD} = 9.61 \text{ kN} \end{cases}$$

### Equilibrio en el nodo D:



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_{BD} \cdot \sin 33.69^\circ =$$

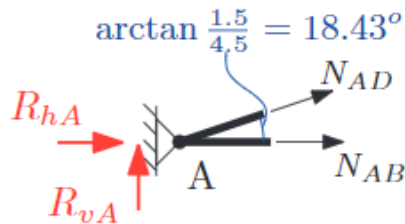
$$= N_{CD} \cdot \cos 6.34^\circ + N_{AD} \cdot \cos 18.43^\circ$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow N_{CD} \cdot \sin 6.34^\circ =$$

$$= N_{BD} \cdot \cos 33.69^\circ + N_{AD} \cdot \sin 18.43^\circ + 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{AD} = -53.16 \text{ kN} \\ N_{CD} = 56.17 \text{ kN} \end{cases}$$

### Equilibrio en el nodo A:



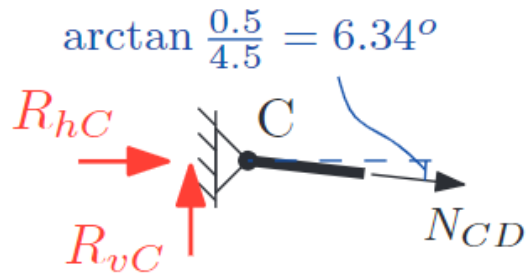
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{hA} + N_{AB} + N_{AD} \cdot \cos 18.43^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_{vA} + N_{AD} \cdot \sin 18.43^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{hA} = 55.76 \text{ kN} \\ R_{vA} = 16.81 \text{ kN} \end{cases}$$

## Equilibrio en el nodo C:



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{hC} + N_{CD} \cdot \cos 6.34^\circ = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_{vC} = N_{CD} \cdot \sin 6.34^\circ$$

$$R_{hC} = -55.76 \text{ kN}$$

$$R_{vC} = 6.26 \text{ kN}$$

## Resultados Finales

$N_{AB}$	-5.33
$N_{AC}$	0.00
$N_{AD}$	-53.16
$N_{BD}$	9.61
$N_{CD}$	56.17

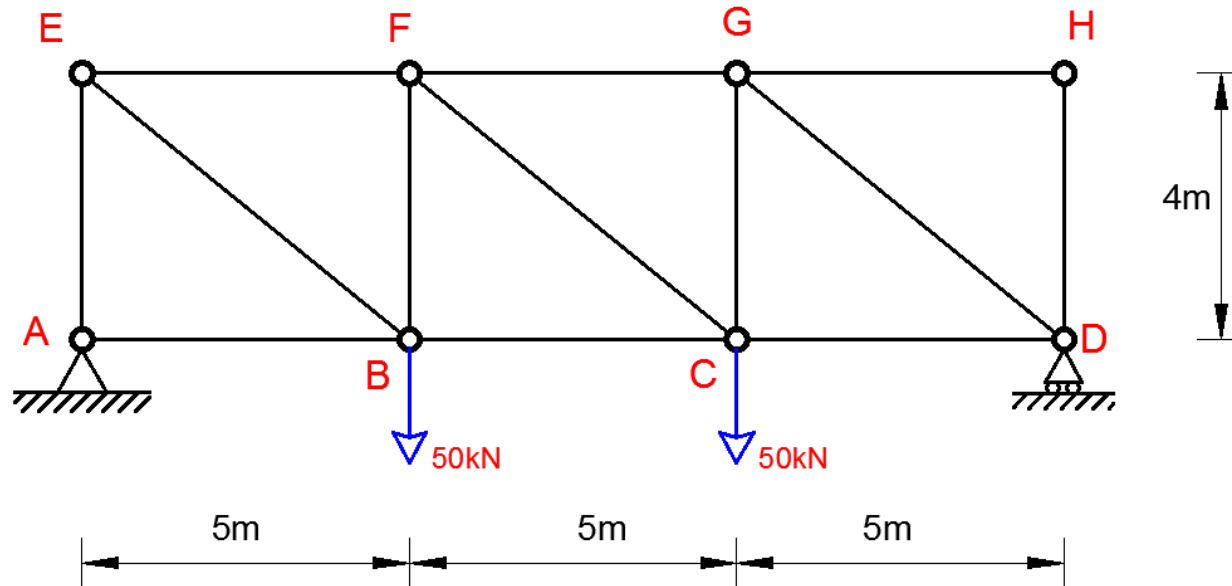
$R_{hA}$	55.76 ( $\rightarrow$ )
$R_{vA}$	16.81 ( $\uparrow$ )
$R_{hC}$	55.76 ( $\leftarrow$ )
$R_{vC}$	6.20 ( $\uparrow$ )

### 1.7.3) METODO DE LAS SECCIONES O DE RITTER:

Consiste en realizar un corte imaginario que separe la estructura en dos partes y plantear el equilibrio de una de ellas para determinar los esfuerzos en algunas barras.

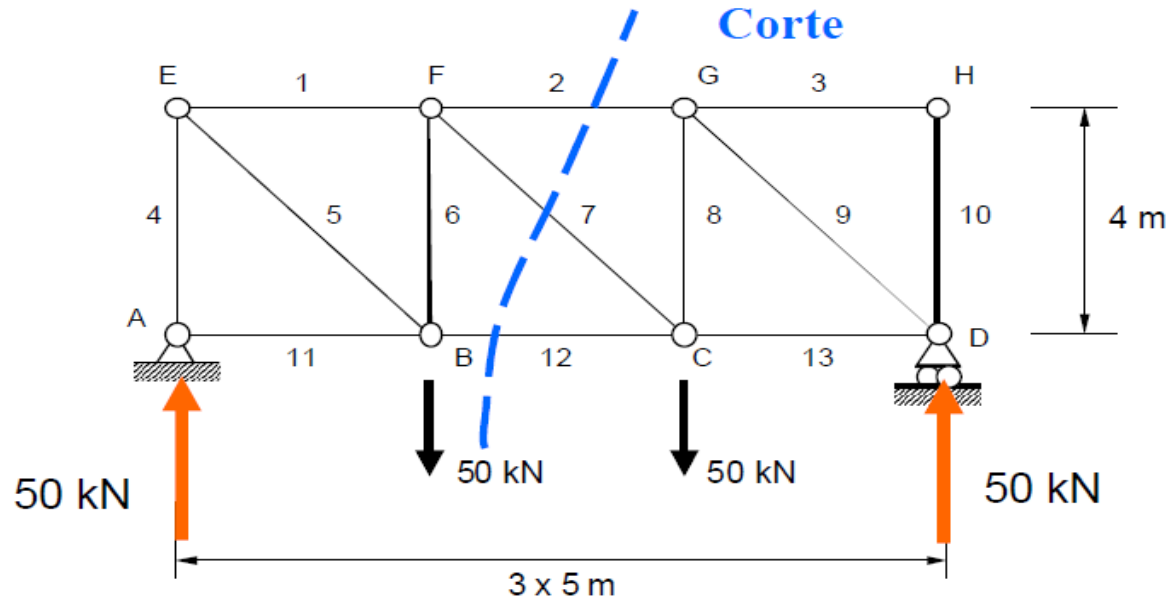
#### EJEMPLO DE APLICACIÓN N°01:

Calcular los esfuerzos en las barras del panel central FGCB de la celosía:



## RESOLVEMOS EL EQUILIBRIO GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:

El equilibrio del conjunto como un cuerpo rígido permite obtener las reacciones en los apoyos



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

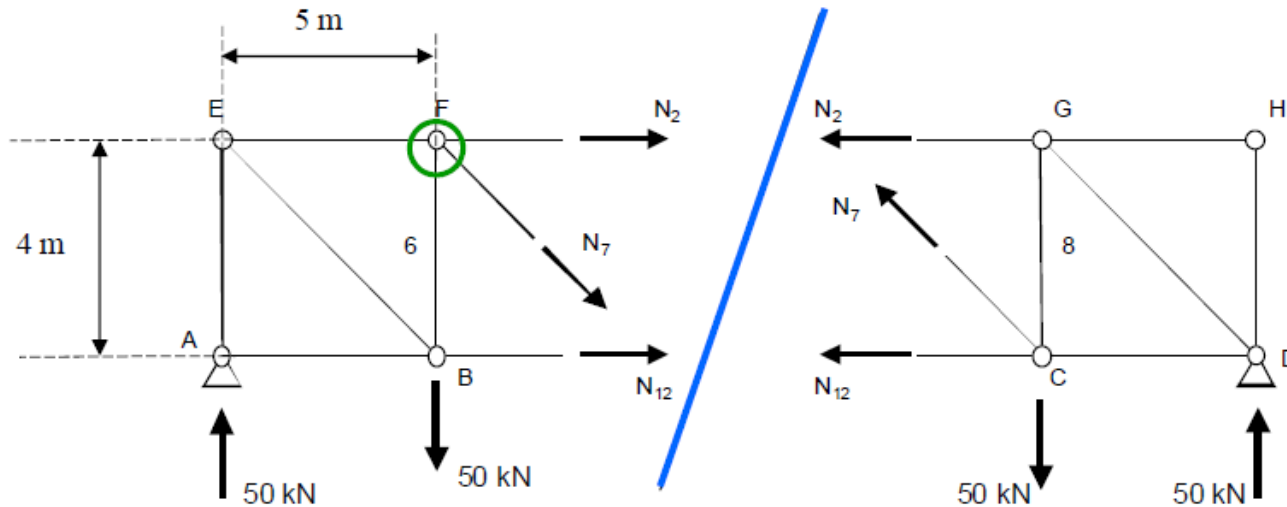
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + V_D = 50 + 50$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 50 \times 5 + 50 \times 10 = V_D \times 15$$

$$V_A = V_D = 50 \text{ kN}$$

## IMPONIENDO EQUILIBRIO DE MOMENTOS RESPECTO DEL NODO F:

Se puede aplicar el equilibrio estático a la parte derecha o izquierda es indistinto.



$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 50 \times 5 - N_{12} \times 4 = 0 \Rightarrow N_{12} = 62,5 \text{ kN (+)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow N_7 \times 0,625 = 0 \Rightarrow N_7 = 0$$

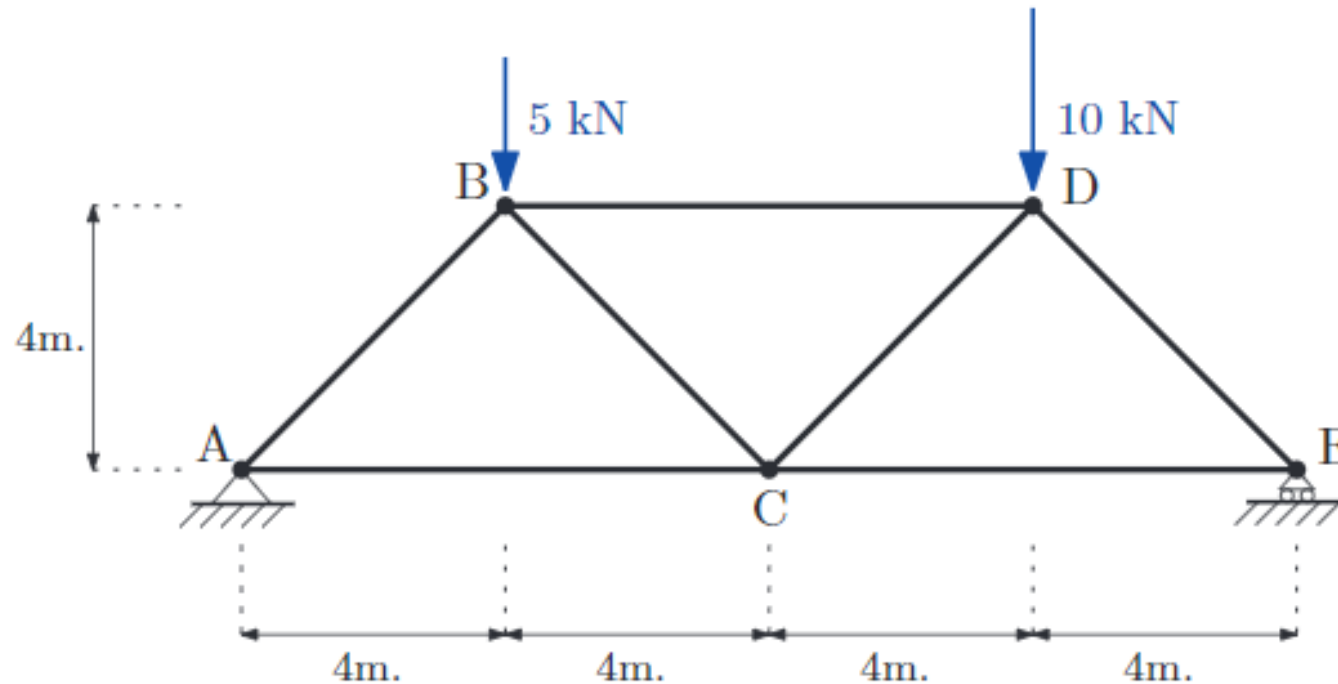
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_2 + 62,5 = 0 \Rightarrow N_2 = 62,5 \text{ kN (-)}$$

Si quisiéramos determinar esfuerzos en otras barras debemos emplear equilibrio de nodos.



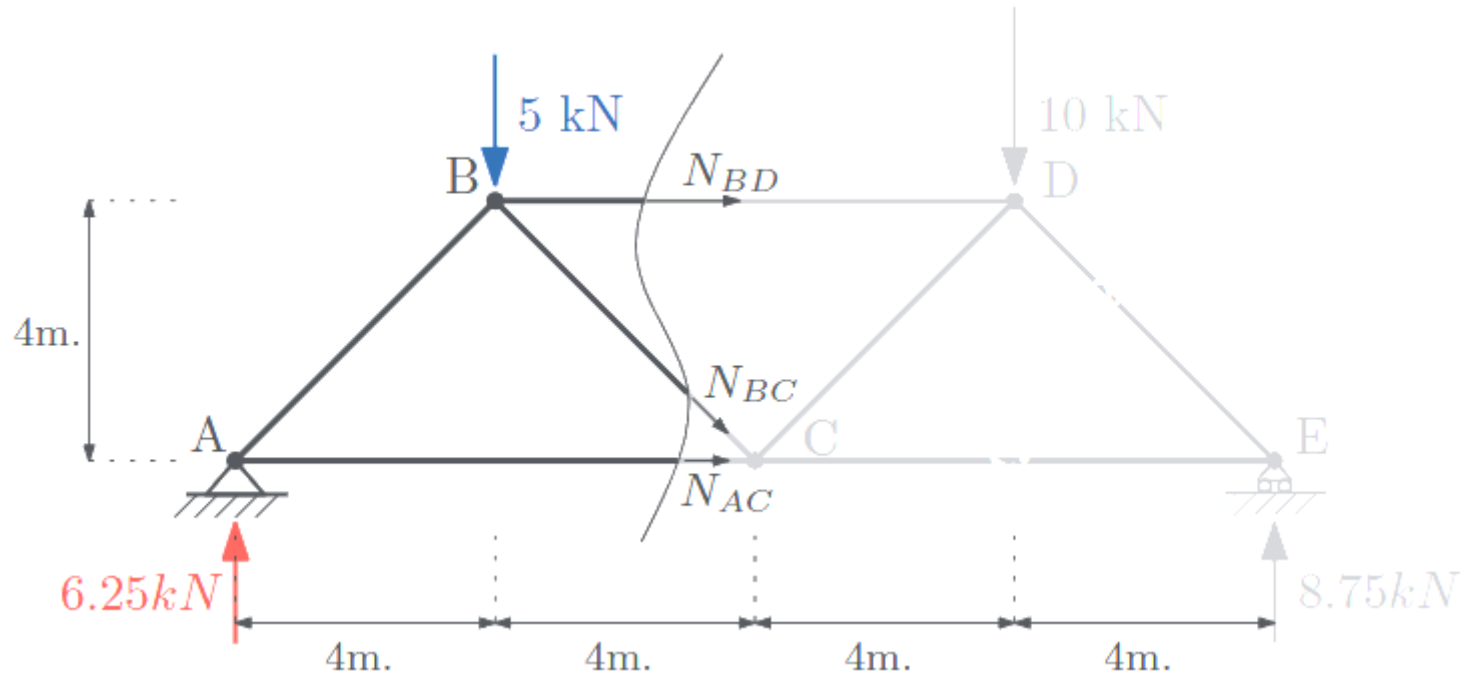
## EJEMPLO DE APLICACIÓN N°02:

Calcule el valor del axil en la barra BD de la siguiente estructura.



## RESOLVEMOS EL EQUILIBRIO GLOBAL DE LA ESTRUCTURA:

En primer lugar, resolvemos el equilibrio global de la estructura para obtener el valor de las reacciones en los apoyos. A continuación hacemos un corte de la estructura que secciones la barra cuyo axil se desea hallar.



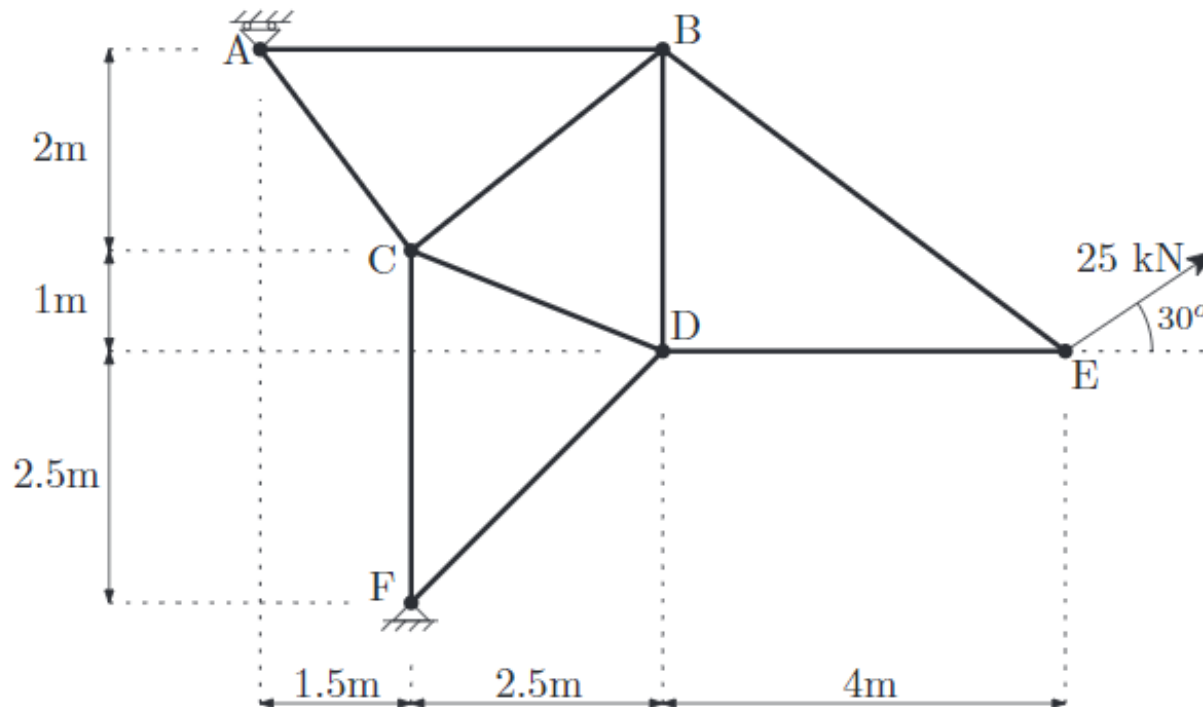
## IMPONIENDO EQUILIBRIO DE MOMENTOS RESPECTO DEL NODO C:

$$N_{BD} \cdot 4 + 6.25 \cdot 8 = 5 \cdot 4 \Rightarrow N_{BD} = 7.50 \text{ kN}$$

## 1.7.4) PROBLEMAS PROPUESTOS:

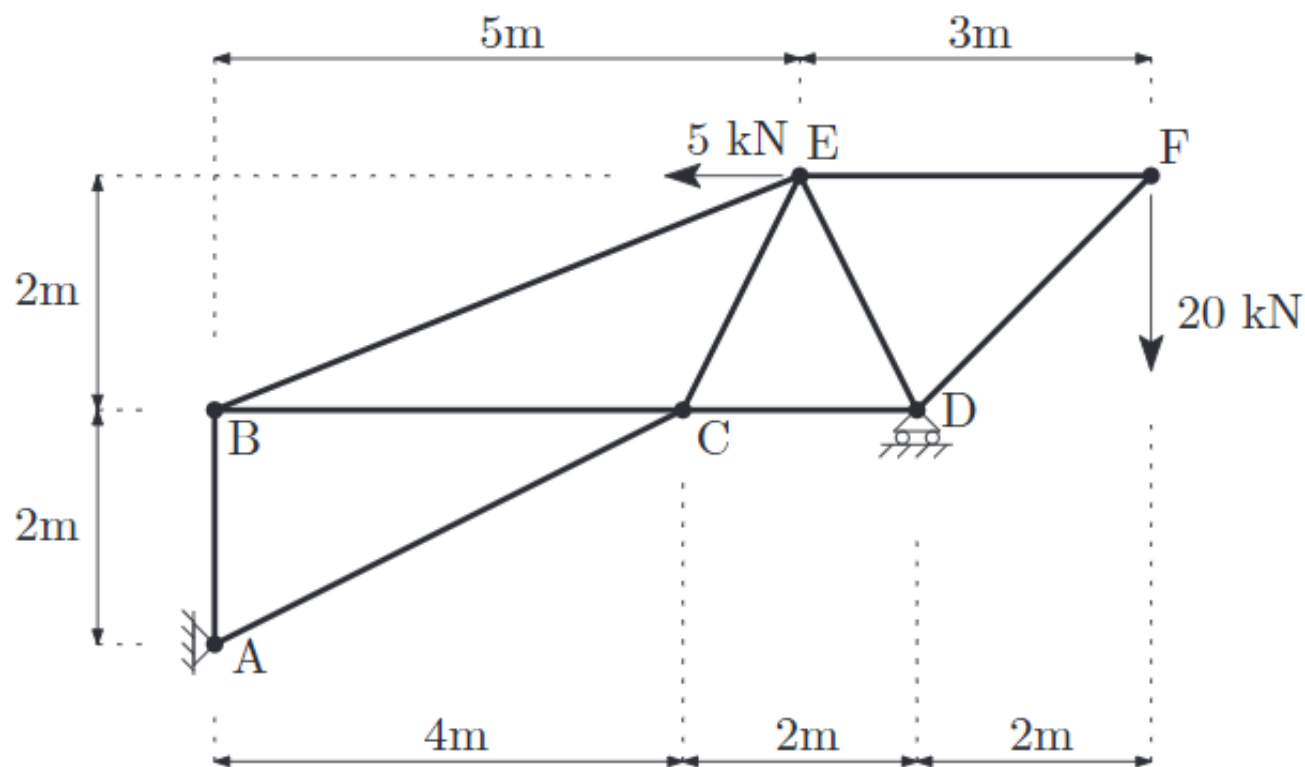
### PROBLEMA N°01:

Obtener los axiles en cada barra de la siguiente estructura articulada así como las reacciones en los apoyos.



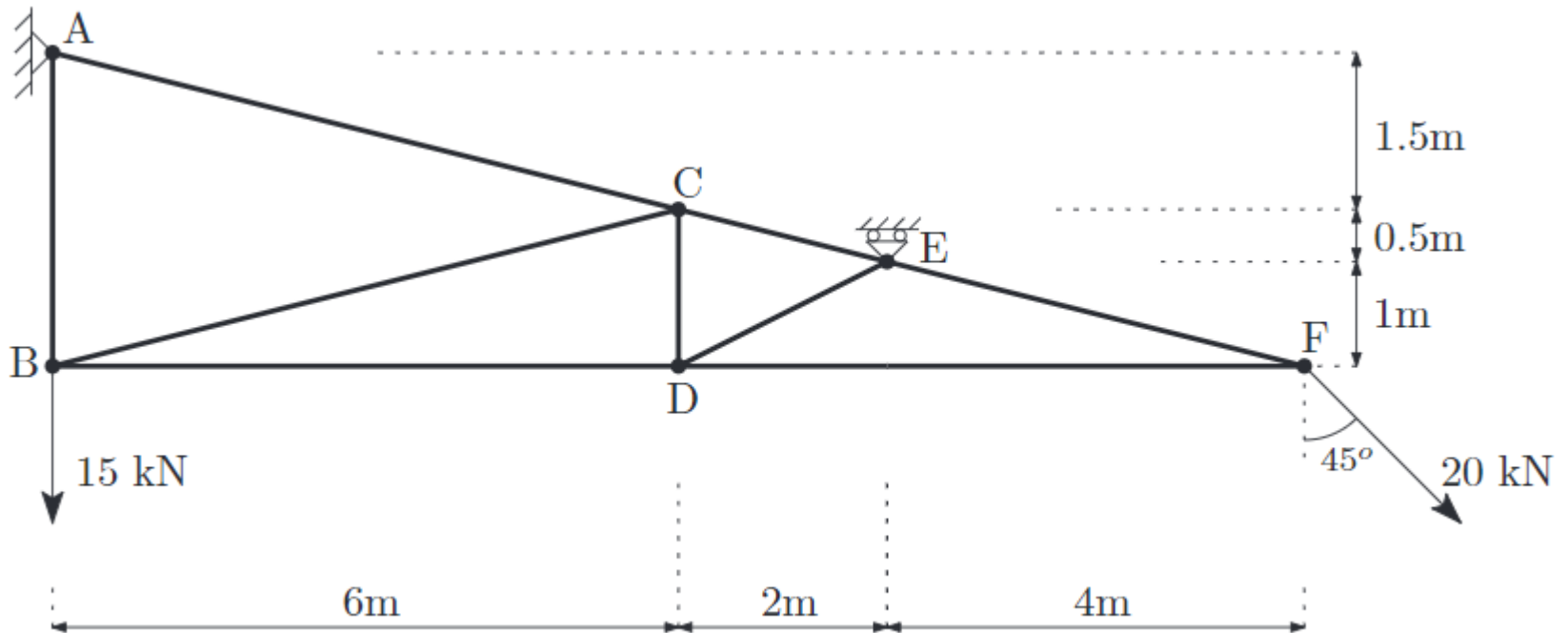
## **PROBLEMA N°02:**

Para la estructura articulada de la figura determinar las reacciones en los apoyos y los axiles en cada barra.



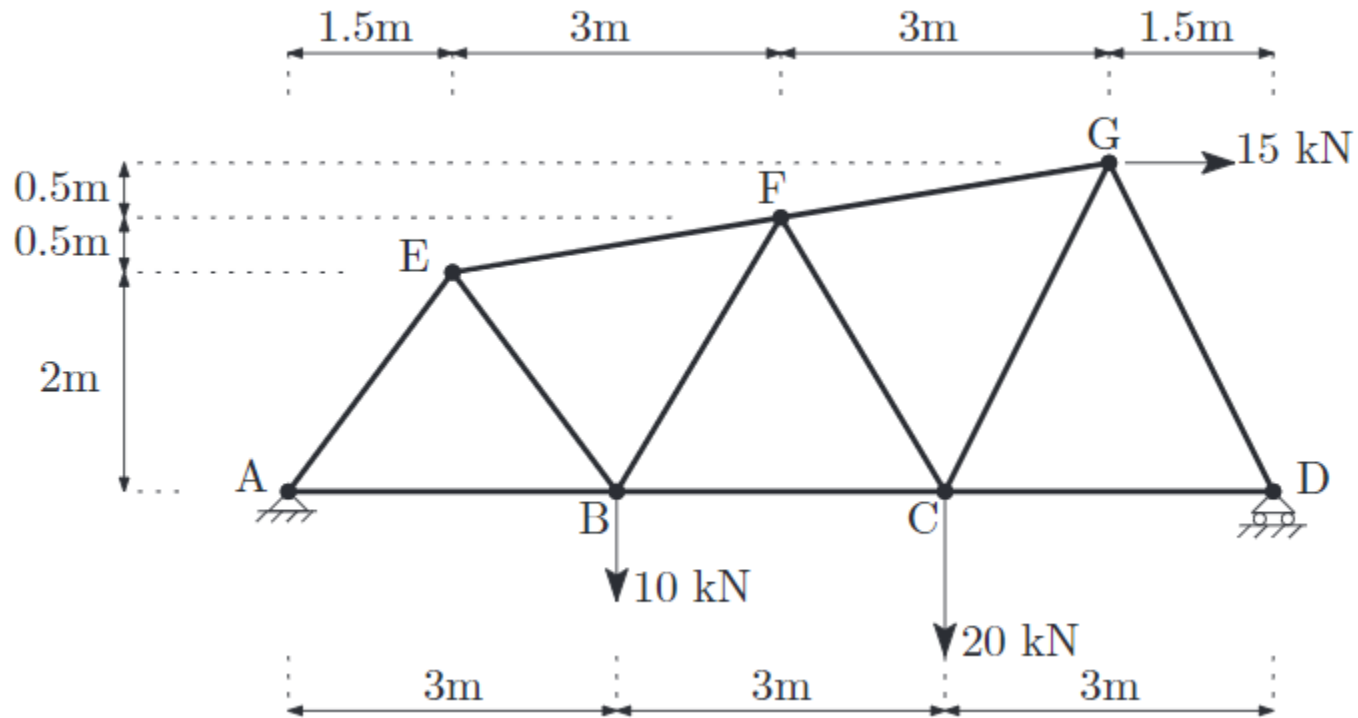
### PROBLEMA N°03:

Para la estructura articulada de la figura determinar: Reacciones en los apoyos, obtener los esfuerzos axiales en la barras e indicar si son de tracción o compresión.



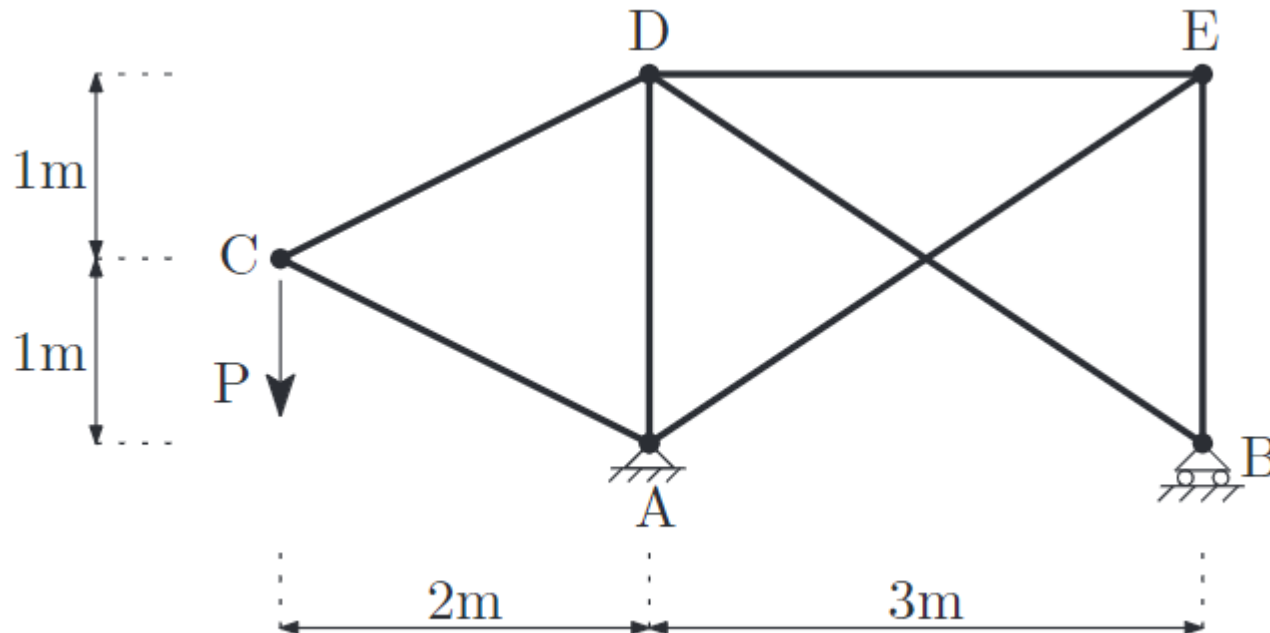
### PROBLEMA N°04:

Para la estructura articulada de la figura determinar: Reacciones en los apoyos, obtener los esfuerzos axiles en la barras e indicar si son de tracción o compresión.



### PROBLEMA N°05:

¿Qué valor ha de tener la carga  $P$  para que la barra  $AE$  está sometida a un axil de compresión de  $50\text{kN}$ ? Una vez definido el valor de  $P$ , obtener el valor de las reacciones y axiles en todas las barras de la estructura.



GRACIAS



FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL  
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL

